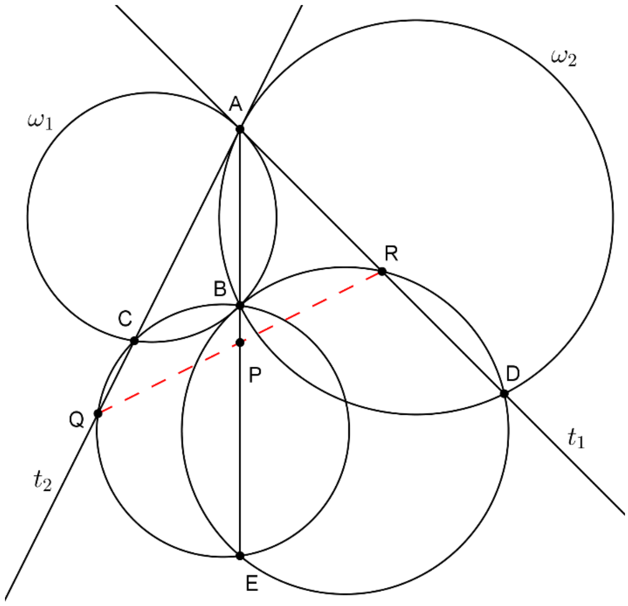
Задача. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во две точки A и B. Нека t_1 и t_2 се тангентите на ω_1 и ω_2, соодветно, низ точката A. Нека вториот пресек на ω_1 и t_2 е C, а вториот пресек на ω_2 и t_1 е D. На полуправата AB, позади B, дадени се точки P и E, така што $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$. Опишаната кружница на $\triangle BCE$ ја сече t_2 по втор пат во точка Q, а опишаната кружница на $\triangle BDE$ ја сече t_1 по втор пат во точка R. Докажи дека точките P, Q и R се колинеарни.

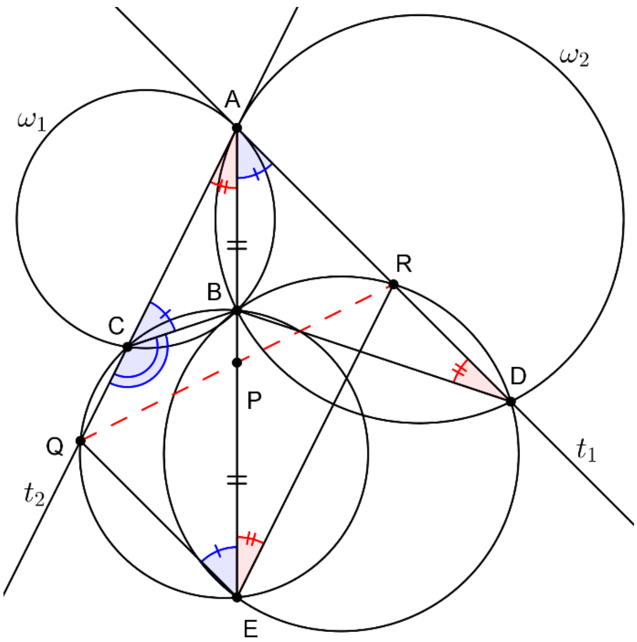
Автор: Стефан Лозановски



Доказ. (Стефан Лозановски)
Од својството за агол помеѓу тангентата t_1 и тетивата AB во ω_1 имаме $\angle BCA = \angle BAD$. Од тетивниот четириаголник $BCQE$ имаме $\angle QEB + \angle QCB = 180°$. Значи,

$$\angle QEA \equiv \angle QEB = 180° - \angle QCB = \angle BCA = \angle BAD \equiv \angle EAR,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $QE \parallel AR$.



Од својството за агол помеѓу тангентата t_2 и тетивата AB во ω_2 имаме $\angle ADB = \angle BAC$. Од тетивниот четириаголник $BRDE$ имаме $\angle REB = \angle RDB$. Значи,

$$\angle REA \equiv \angle REB = \angle RDB \equiv \angle ADB = \angle BAC \equiv \angle EAQ,$$

па бидејќи наизменичните агли на трансверзалата EA се еднакви, добиваме $RE \parallel AQ$.

Значи, четириаголникот $AQER$ е паралелограм. Од $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AP}$, добиваме $\overline{AP} = \overline{PE}$, т.е. P е средина на дијагоналата AE во паралелограмот $AQER$. Бидејќи дијагоналите во паралелограм се преполовуваат во пресечната точка, добиваме дека P мора да е средина и на другата дијагонала QR, т.е. дека $P \in QR$. Значи, точките P, Q и R се колинеарни ■