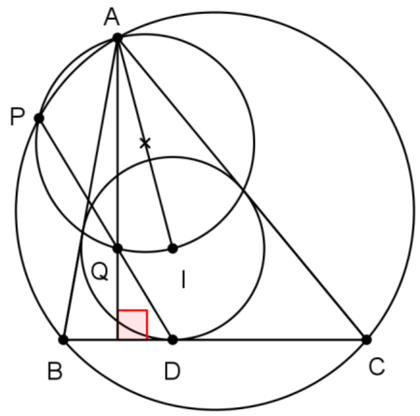
Задача. Нека ABC е триаголник со опишана кружница ω. Нека I е центарот на неговата вписана кружница, која ја допира страната BC во точка D. Кружницата со дијаметар AI ја сече ω во точка $P \neq A$, а PD во точка $Q \neq P$. Докажи дека $AQ \perp BC$.

Автори: Никола Даневски и Стефан Лозановски



Доказ (Никола Даневски и Стефан Лозановски)**.**

Според Талесова Теорема $AQ \perp QI$, па треба да докажеме дека $QI \parallel BC$. За ова, треба да важи $\angle IQD = \angle QDB$, но бидејќи $IQPA$ е тетивен, знаеме дека $\angle IQD = \angle PAI$, па затоа треба да докажеме дека $\angle PAI = \angle QDB \equiv \angle PDB$, што ќе следува ако докажеме дека $APDS$ е тетивен, каде $S = AI \cap BC$. За да ја докажеме таа тетивност, доволно е да покажеме дека $\angle APD = \angle ASC$. Но, $\angle ASC = \beta + \frac{\alpha}{2}$ (како надворешен агол во $\triangle ABS$), а $\angle APD = \angle APC + \angle CPD = \beta + \angle CPD$, па треба да докажеме дека $\angle CPD = \frac{\alpha}{2}$. Бидејќи $\angle BPC = \angle BAC = \alpha$, треба да докажеме дека PD е симетрала на $\angle BPC$. Ова ќе го докажеме со теоремата за симетрала на агол во $\triangle PBC$.

Нека E и F се допирните точки на впишаната кружница на ABC со страните CA и AB, соодветно. Според Талесова Теорема, тие лежат на кружницата со дијаметар AI.

Да ги разгледаме триаголниците PBF и PCE.

$$\angle PBF \equiv \angle PBA = \angle PCA \equiv \angle PCE$$

$$\angle PFB = 180^\circ - \angle PFA = 180^\circ - \angle PEA = \angle PEC$$

Според признакот АА, $\triangle PBF \sim \triangle PCE$, па

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CE}}.$$

Како тангентни отсечки $\overline{BF} = \overline{BD}$ и $\overline{CE} = \overline{CD}$, па

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CD}},$$

од што, според теоремата за симетрала на агол, следува дека PD е симетрала на $\angle BPC$ ■