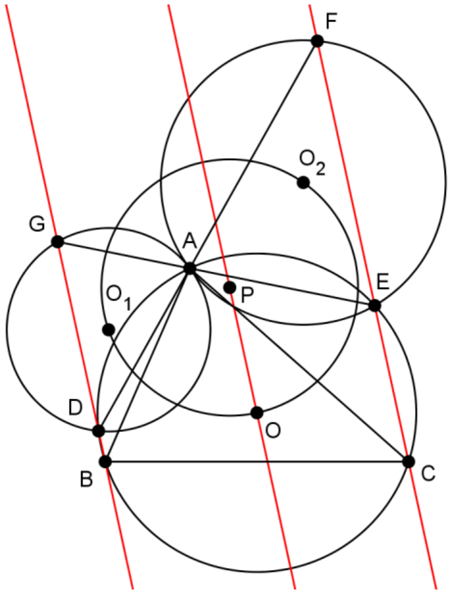
Задача. Нека ABC е триаголник со опишана кружница ω. Нека ℓ_B и ℓ_C се прави низ темињата B и C, соодветно, така што $\ell_B \parallel \ell_C$. Правите ℓ_B и ℓ_C по втор пат ја сечат ω во точки D и E, соодветно ($D \in \widehat{AB}, E \in \widehat{AC}$). Нека DA ја сече ℓ_C во F, а EA ја сече ℓ_B во G. Ако O, O_1 и O_2 се центри на опишаните кружници на триаголниците ABC, ADG и AEF, соодветно, а P е центарот на опишаната кружница на триаголникот OO_1O_2, докажи дека $\ell_B \parallel OP \parallel \ell_C$.

Автор: Стефан Лозановски



Доказ (Стефан Лозановски)**.**
Бидејќи O_1, O_2 се центри на $(AGD), (AEF)$ и бидејќи $GD \parallel FE$, добиваме

$$\angle GAO_1 = 90° - \frac{\angle GO_1A}{2} = 90° - \angle GDA = 90° - \angle EFA = 90° - \frac{\angle EO_2A}{2} = \angle EAO_2,$$

па поради тоа што G, A, E се колинеарни, заклучуваме дека и O_1, A, O_2 се колинеарни.

Нека $\angle(DF, FE) = \varphi$. Тогаш, како централен агол $\angle AO_2E = 2\varphi$. Поради тоа што AE е заедничката тетива на ω и ω_2, правата која минува низ нивните центри, OO_2, го преполовува $\angle AO_2E$, т.е. $\angle AO_2O = \varphi$. Поради колинеарноста на O_1, A, O_2, добиваме $\angle O_1O_2O \equiv \angle AO_2O = \varphi$. Како централен агол во (O_1O_2O), $\angle O_1PO = 2\varphi$, па $\angle POO_1 = 90° - \varphi$. Бидејќи AD е заедничката тетива на ω и ω_1, имаме $OO_1 \perp DA$. Конечно, бидејќи $\angle(DF, OO_1) = 90°$ и $\angle(PO, OO_1) = 90° - \varphi$, од збир на агли во триаголник добиваме $\angle(DF, PO) = \varphi = \angle(DF, FE)$, па. $PO \parallel FE$ ■