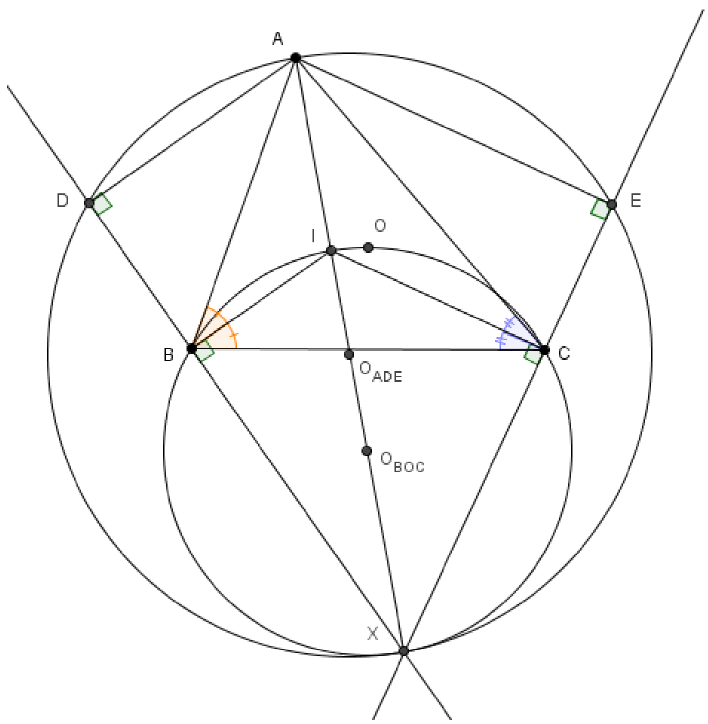
(Стефан Лозановски) Нека ABC е триаголник со $\angle BAC = 60^{\circ}$. Нека D и E се подножјата на нормалите од темето A до симетралите на надворешните агли при темињата B и C во триаголникот ABC, соодветно. Нека O е центар на опишана кружница во триаголникот ABC. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот BOC ја допира опишаната кружница на триаголникот ADE.

Доказ. (Стефан Лозановски) Нека X е пресекот на правите BD и CE. Ќе докажеме дека X лежи на опишаните кружници на триаголниците ADE и BOC, а потоа ќе докажеме дека центрите на овие кружници и точката X се колинеарни, што е доволно за да се докаже дека овие две кружници се допираат.
Ќе ги користиме ознаките (MNP) и O_{MNP} за опишана кружница и центар на опишана кружница околу триаголникот MNP, соодветно.



$\angle ADX + \angle AEX = 90° + 90° = 180°$
$\therefore X \in (ADE),\ O_{ADE} \in AX$ (1)

Нека I е центарот на впишана кружница во триаголникот ABC.

$$\angle IBX = \angle IBC + \angle CBX = \frac{\beta}{2} + \frac{180° - \beta}{2} = 90°$$

Слично, $\angle ICX = 90°$.

$\angle IBX + \angle ICX = 90° + 90° = 180°$
$\therefore X \in (BIC), O_{BIC} \in IX$ (2)

Поради тоа што $\alpha = 60°$, имаме:

$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha = 120°$

$\angle BIC = 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2} = 120°$

$\therefore \angle BOC = \angle BIC$

$\therefore O \in (BIC)$

$\therefore (BIC) \equiv (BOC),\ O_{BIC} \equiv O_{BOC}$ (3)

Лесно се покажува дека симетралата на внатрешниот агол при темето A и симетралите на надворешните агли при темињата B и C се сечат во една точка (центарот на припишана кружница спроти темето A), па затоа точките $A - I - X$ се колинеарни. Ако ова го искомбинираме со (1), (2) и (3), може да заклучиме дека точките $O_{ADE} - O_{BOC} - X$ се колинеарни. ■

Забелешка. Во текстот на задачата, како друга варијанта, може да се замени „триаголникот BOC" со „триаголникот BHC", каде што H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Ова е точно бидејќи и H лежи на опишаната кружница на триаголникот BOC ($\angle BHC = 180° - \alpha = 120° = \angle BOC$).